Extrema unter Nebenbedingungen

oder

Optimierungsaufgaben

3 Beispielaufgaben

Videotutorial zu den Beispielaufgaben unter:
www.logeum.org/Bsp_Optimierungsaufgaben.php

Extrema unter Nebenbedingungen - Beispielaufgabe 1

Aus der blauen Dreiecksfläche soll ein rechteckiges Stück ausgeschnitten werden, dessen Flächeninhalt möglichst groß sein soll.

Das Rechteck soll Kanten parallel zu den Achsen haben.

$A = a \cdot b$ **Problem: 2 Variablen**

$g(a) = -\frac{3}{2}a + 3 = b$

$b = -\frac{3}{2}a + 3$

Nebenbedingung

$A(a) = a \cdot \left(-\frac{3}{2}a + 3\right)$

Zielfunktion

Extremwertbestimmung

$$A(a) = a \cdot \left[-\frac{3}{2}a + 3\right] = -\frac{3}{2}a^2 + 3a$$

$$A'(a) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)a^1 + 3 = -3a + 3$$

$$A''(a) = -3$$

$A'(a) = 0$

$$0 = -3a + 3 \quad | + 3a$$

$$3a = 3 \quad | : 3$$

$$a = 1$$

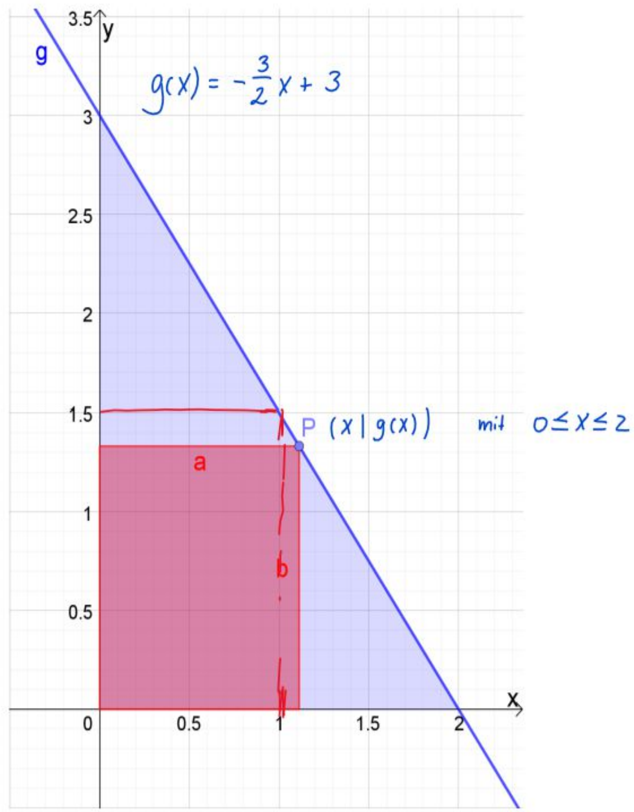
$$A''(1) = -3 < 0 \quad \text{(also Max.)}$$

Für $a = 1$ wird der Flächeninhalt maximal.

$b = -\frac{3}{2}a + 3 \qquad b = -\frac{3}{2} \cdot 1 + 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Der maximale Flächeninhalt beträgt

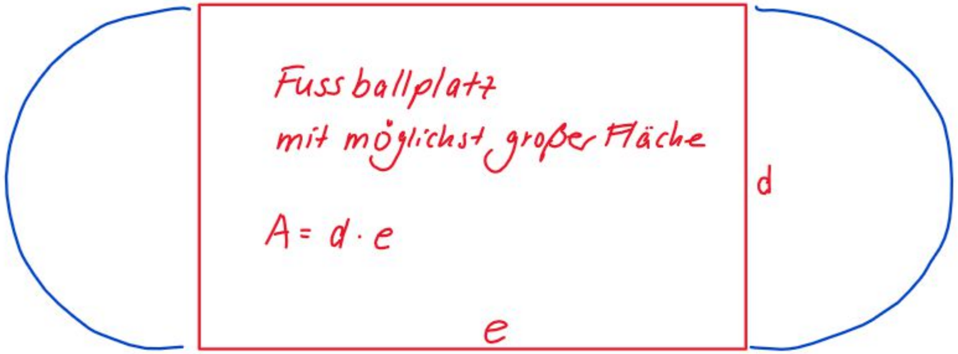
$A = 1 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{1{,}5}}$



Extrema unter Nebenbedingungen - Beispielaufgabe 2

Es soll eine Sportanlage mit einer Laufbahn und einem Fussballplatz gebaut werden. Die Laufbahn soll 400m lang sein und den Fussballplatz einschließen. Bestimme die Maße des Fussballplatzes so, dass seine Fläche möglichst groß wird.

Laufbahn mit 400m Länge



$U = 2\pi \cdot r$

$U = 2\pi \cdot \frac{1}{2} d = \pi d$

$400 = \pi \cdot d + 2e$ Nebenbedingung

$400 - \pi d = 2e$

$\frac{400 - \pi d}{2} = e$

$400 - 2e = \pi d$

$\frac{400 - 2e}{\pi} = d$

Zielfunktion

$A = d \cdot e$

$A(e) = \frac{400 - 2e}{\pi} \cdot e \qquad 0 \leq e \leq 200$

Extremwertbestimmung

$A(e) = \frac{(400 - 2e)}{\pi} \cdot \frac{e}{1} = \frac{(400 - 2e) \cdot e}{\pi}$

$= \frac{400e - 2e^2}{\pi} = \frac{400e}{\pi} - \frac{2e^2}{\pi}$

$A(e) = \frac{400}{\pi} \cdot e - \frac{2}{\pi} \cdot e^2$

$A'(e) = \frac{400}{\pi} - 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot e^1$

$= \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi} e$

$A''(e) = -\frac{4}{\pi} < 0$

$A'(e) = 0$

$0 = \frac{400}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot e$

$\frac{4}{\pi} \cdot e = \frac{400}{\pi}$

$4e = 400$

$e = 100$

$A''(100) < 0$

Für $e = 100$ wird die Fläche des Fussballfeldes maximal.

$d = \frac{400 - 2e}{\pi}$

$d = \frac{400 - 200}{\pi} = \frac{200}{\pi} \approx 63{,}66$

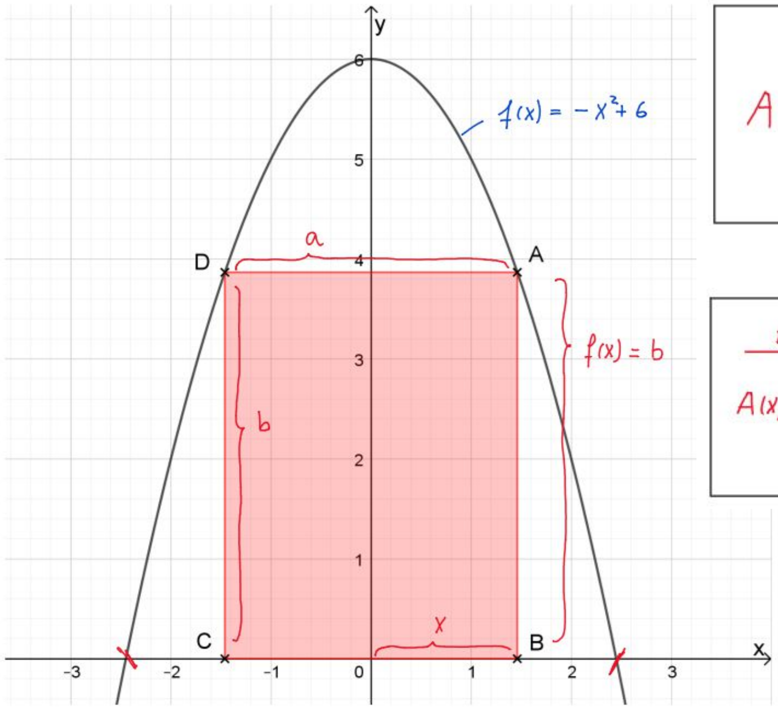
Maximale Größe des Fussballfeldes

$e = 100$ m und $d \approx 63{,}66$ m

ist $A \approx 6366$ m²

Extrema unter Nebenbedingungen - Beispielaufgabe 3

Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = -x^2+6$ soll oberhalb der x-Achse ein Rechteck einschließen. Alle Rechteckseiten sollen parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Berechne den Flächeninhalt für das größtmögliche Recheck.



Nullstellen von $f(x)$

$f(x) = 0$

$0 = -x^2+6 \quad | +x^2$

$x^2 = 6 \quad | \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{6}$

$$A = a \cdot b$$

Nebenbedingungen

$a = 2x$

$b = f(x)$

$\;\;\, = -x^2+6$

Flächenfunktion (Zielfunktion)

$A(x) = 2x \cdot (-x^2+6)$

$\quad\;\;\, = -2x^3 + 12x$

Definitionsmenge

$x \in [0; \sqrt{6}]$

Extremwertbestimmung

$A'(x) = -6x^2 + 12$

$A''(x) = -12x$

$A'(x) = 0$

$0 = -6x^2 + 12 \quad | +6x^2$

$6x^2 = 12 \quad | :6$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$ hier nur: $x = \sqrt{2}$

$A''(\sqrt{2}) = -12 \cdot \sqrt{2} < 0$

Für $x = \sqrt{2}$ wird der Fl inhalt maximal.

$A(\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^3 + 12 \cdot \sqrt{2}$

$= -2 \cdot \sqrt{2^3} + 12\sqrt{2}$

$= -2 \cdot \sqrt{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 12\sqrt{2}$

$= -4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

Der größtmögliche Flächeninhalt beträgt $8\sqrt{2}$.